

# Entropie Topologique et Définition du Chaos

Alain FRISCH

29 juin 1998

Dans le domaine des sciences physiques, le terme de chaos se rapporte à une classe de phénomènes erratiques, essentiellement imprévisibles, mais pour lesquels une loi impose tout de même un ordre sous-jacent. Dans la mesure où une infime variation des conditions initiales modifie considérablement le comportement d'un système chaotique, il n'est pas possible de prédire l'évolution à long terme du système si l'on n'a pas une connaissance infiniment précise de son état.

La notion de chaos, si elle fut pressentie plus tôt, n'est introduite dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques discrets qu'en 1975 par Li et Yorke. D'autres définitions existent, mais aucune ne semble vraiment s'être imposée. En fait une certaine confusion règne dans les différentes tentatives de définition : il n'a pas été possible de trouver dans la littérature une véritable comparaison ni une véritable justification des divers critères du chaos.

Pour définir quantitativement le chaos, il est naturel de chercher à **mesurer la complexité de la dynamique d'un système**. L'entropie topologique est un des outils utilisables dans ce but. Elle présente, par rapport à d'autres définitions du chaos, l'avantage de s'appuyer sur une théorie riche dont nous présenterons quelques résultats.

Précisons tout d'abord le cadre mathématique dans lequel on se place. Soit un espace métrique compact  $E$ ,  $f : E \rightarrow E$  une application continue, qui représente la loi d'évolution d'un **système dynamique discret** sur l'**espace des phases**  $E$ . Partant d'un **état initial**  $x_0$ , on peut construire ses itérés par  $f$  :  $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots ; f^n(x_0)$  est l'état du système « à l'instant  $n$  ». Nous utiliserons aussi la distance sur  $E$  :  $\mathbf{d}_{n,f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{0 \leq j < n} \mathbf{d}(f^j(\mathbf{x}), f^j(\mathbf{y}))$ .  $E$  muni de cette distance reste compact. Les boules ouvertes associées seront notées  $B_{n,f}(x, r)$  : ce sont des ouverts pour la distance  $d$ .

## 1 Comment mesurer la complexité d'un système dynamique ?

### 1.1 Un système est complexe lorsqu'il est difficile d'approximer son comportement

Nous dirons qu'un ensemble d'états initiaux est caractéristique si la connaissance de l'évolution du système pendant une durée  $n$  à partir de chacun de ces points permet d'approximer raisonnablement l'évolution à partir de n'importe quel état initial. Le système sera d'autant plus complexe que le nombre minimum de points caractéristiques nécessaires pour avoir **une bonne approximation** sera élevé. On s'attend à ce que cette quantité soit à peu près exponentielle en  $n$  : si on laisse le système évoluer une étape de plus, il faudra multiplier par un certain coefficient le nombre de points nécessaire pour l'approcher.

Formalisons cette définition. Soit  $\varepsilon > 0$ . On dit qu'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est  $(n, \varepsilon)$  **couvrant** pour  $f$  si :  $\bigcup_{x \in A} B_{n,f}(x, \varepsilon) = E$ . On note  $r(n, \varepsilon, f)$  le cardinal minimal d'une telle partie. Cette quantité est finie. Nous voulons maintenant mesurer la vitesse de croissance exponentielle de cette quantité avec  $n$ . Nous pourrions regarder la quantité  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{r(n+1, \varepsilon, f)}{r(n, \varepsilon, f)}$  mais une minoration (resp. majoration) sur  $r(n, \varepsilon, f)$  ne serait pas exploitable. On préfère introduire :

$$h(\varepsilon, f) \stackrel{def}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon, f) \right) \quad \text{et} \quad h(f) \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(\varepsilon, f)$$

$h$  est l'entropie de  $f$ . La limite existe car l'on montre facilement que  $h(\varepsilon, f) < \infty$  (section 3.1) et que  $h(\varepsilon, f)$  est une fonction décroissante d' $\varepsilon$ . Cependant, elle peut être infinie.

## 1.2 Un système est complexe lorsqu'il disperse des états proches

C'est l'idée intuitive de la **sensibilité aux conditions initiales**, typique des systèmes chaotiques. Prenons deux états initiaux très proches. Leurs trajectoires restent pendant un certain temps peu éloignées, mais elles finissent par diverger. Si l'on compte le nombre maximum de points dont les orbites ne restent pas collées pendant un temps  $n$ , et que l'on étudie la vitesse de croissance de cette quantité par rapport à  $n$ , on dispose d'une mesure du **caractère dispersif** du système.

On formalise cette nouvelle approche par de la façon suivante : un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est dit  $(n, \varepsilon)$  **séparé** pour  $f$  si  $\forall (x, y) \in A^2, x \neq y, d_{n,f}(x, y) \geq \varepsilon$  et l'on considère  $s(n, \varepsilon, f)$ , cardinal maximal d'une telle partie. En fait cette quantité est liée à  $r(n, \varepsilon, f)$  par l'encadrement  $s(n, 2\varepsilon, f) \leq r(n, \varepsilon, f) \leq s(n, \varepsilon, f)$ . On le démontre en constatant qu'un ensemble  $(n, \varepsilon)$  séparé maximal est  $(n, \varepsilon)$  couvrant et qu'un ensemble  $(n, 2\varepsilon)$  séparé s'injecte dans un ensemble  $(n, \varepsilon)$  couvrant (ces deux propriétés découlent directement des définitions).

On peut alors définir  $h_{sep}(\varepsilon, f) \stackrel{def}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon, f))$  et dans la définition de  $h(f)$ , on peut remplacer  $h(\varepsilon, f)$  par  $h_{sep}(\varepsilon, f)$  sans en changer la valeur. Cette deuxième définition permet par exemple de montrer immédiatement que si  $F \subset E$  est un fermé stable, alors  $h(f|_F) \leq h(f)$ .

*Remarque.* On pourrait aussi formaliser l'idée de trajectoires indissociables en considérant  $t(n, \varepsilon, f)$ , cardinal minimal d'un recouvrement de  $E$  par des ouverts de diamètre  $\leq \varepsilon$  pour  $d_{n,f}$ . On a alors facilement :  $t(n, 2\varepsilon) \leq r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq t(n, \varepsilon)$  et aussi  $t(n + m, \varepsilon) \leq t(n, \varepsilon)t(m, \varepsilon)$ . La suite  $\ln t(n, \varepsilon)$  est donc sous-additive. Cela permet de définir  $h_{rec}(\varepsilon, f)$  comme une vraie limite (et non une limite sup) sans changer la valeur de  $h(f)$ .

## 1.3 Une application est dite chaotique si son entropie est non nulle

L'hypothèse de compacité sur l'espace est nécessaire, comme le montre l'exemple de la fonction identité sur  $\mathbb{R}$  qui aurait une entropie infinie, ce qui fait désordre pour une fonction aussi peu chaotique.

Une entropie positive impose une démultiplication importante (exponentielle) du nombre d'orbites visibles à chaque itération. On montre en effet (section 3.1) que  $s(nl, 2\varepsilon) \leq r(n, \varepsilon)^l$  puis  $h_{sep}(2\varepsilon, f) \leq \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon, f)$ .

# 2 Petits résultats et exemples de calcul

## 2.1 Théorèmes de calcul

Quelques petits théorèmes de calcul facilitent la compréhension de l'entropie.

**Théorème 1.**

- 1) si  $k \in \mathbb{N} : h(f^k) = kh(f)$ .
- 2) si  $f$  est bijective :  $h(f^{-1}) = h(f)$ .
- 3) si  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p$  est une décomposition de  $E$  en sous-ensembles fermés stables deux à deux disjoints alors  $h(f) = \max_i h(f|_{E_i})$
- 4) si  $f$  est expansive ( $\exists \delta > 0 \setminus \forall x \neq y, \exists n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ ), et  $p_n$  le nombre de points de période  $n$  au sens large, alors  $h(f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} p_n$

Le point 1) montre que  $f$  est chaotique dès qu'une de ses itérées l'est et qu'alors elles le sont toutes. Le point 3) montre que si le système présente des comportements différents dans plusieurs zones, alors il est chaotique si l'un de ces comportements l'est. Le point 4) permet de montrer rapidement que certaines des applications chaotiques au sens des définitions qualitatives style Devaney le sont aussi au sens de l'entropie.

## 2.2 Entropie et conjugaison

Dans l'étude des systèmes dynamiques, le problème de la conjugaison joue un rôle important. Il s'agit de savoir comment se comportent les notions manipulées lorsque l'on observe la « même » fonction sous deux points de vue différents. Cela signifie que l'on remplace l'espace des phases  $E$  par un espace homéomorphe  $F$ . Plus précisément, on considère  $g$  telle que  $g \circ \Psi = \Psi \circ f$  où  $\Psi$  est un homéomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ F & \xrightarrow{g} & F \end{array}$$

On dit alors que  $f$  et  $g$  sont conjuguées par  $\Psi$ . Si  $\Psi$  n'est que surjective et continue, nous dirons que  $g$  est semi-conjuguée à  $f$ . On a alors facilement  $h(f) \geq h(g)$ . On en déduit :

**Théorème 2 (Invariance de l'entropie).** *Si  $f$  et  $g$  sont conjuguées :  $h(f) = h(g)$ . Nous traduisons cette propriété en disant que l'entropie est un invariant topologique.*

Ce résultat sera amélioré plus loin. Il permet souvent de faciliter le calcul de l'entropie d'une application dont on connaît une conjuguée simple (doublement des angles, décalages : voir plus bas). De plus, cette condition nécessaire de conjugaison constitue une méthode puissante pour prouver que deux applications ne sont pas conjuguées.

Remarquons qu'un changement de distance topologiquement équivalente se traduit par une situation de conjugaison. Rappelons également que si  $E$  est compact,  $\Psi$  est bijective continue, alors  $\Psi$  est automatiquement un homéomorphisme.

### 2.3 Exemples de calcul

Les **applications 1- Lipschitziennes** ont bien sûr une entropie nulle car  $r(n, \varepsilon, f)$  ne dépend pas de  $n$ . Cela se généralise aux applications qui possèdent une itérée 1-Lipschitzienne. Ces applications ne sont pas chaotiques : elles ont plus tendance à « coller » les trajectoires qu'à les faire s'écarter les unes des autres.

*Exemple (L'application doublement des angles, doubling map).*  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  muni de la distance naturelle ;  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ;  $x \mapsto 2x$ . On montre facilement que  $h(f) = \ln 2$ . L'application doublement des angles est chaotique (c'est d'ailleurs un exemple canonique de sensibilité aux conditions initiales).

*Exemple (Dynamique symbolique et application décalage).* Considérons un espace  $E$  et une partition  $\mathcal{P} = (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  de cet espace. Si l'on se donne une application  $f : E \rightarrow E$ , on peut associer à chaque point  $x \in E$  son itinéraire relativement à  $\mathcal{P}$  :  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $f^n(x) \in \mathcal{A}_{i_n} \in \mathcal{P}$ . Notons  $\Psi$  l'application trajectoire  $E \rightarrow S = I^{\mathbb{N}}$ . Si l'on choisit  $\mathcal{P}$  judicieusement ( $I$  étant fini), et quitte à restreindre l'espace d'arrivée de  $\Psi$  à  $\Sigma = \Psi(E)$  il est souvent possible, pour des applications qui « dispersent » bien les points, de rendre  $\Psi$  bijective. Etudier la dynamique de  $f$ , c'est s'intéresser aux distances des itérés successifs de deux points et il est donc naturel de définir sur  $S$  une distance de la forme  $d(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\delta(s_n, t_n)}{3^n}$  où  $\delta$  est la distance triviale (booléenne).

Si  $t$  est un élément de  $S$ , la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $t$  et de rayon  $\frac{1}{3^n-1}$  (resp.  $\frac{1}{2 \cdot 3^n-1}$ ) est l'ensemble des éléments de  $S$  ayant les mêmes  $n$  premières lettres que  $t$  (chaque élément de cette boule en est un centre). On note  $S_n$  l'ensemble de ces boules (c'est un recouvrement ouvert fini de cardinal  $(\text{Card } I)^n$ ).

Avec cette distance, deux points de  $E$  sont proches (via  $\Psi$ ) si leurs itérés restent longtemps dans les mêmes zones définies par  $\mathcal{P}$ . Supposons alors les  $\mathcal{A}_i$  ouverts :  $f$  étant continue,  $\Psi$  l'est aussi. C'est donc un homéomorphisme qui conjugue  $f$  à l'application décalage  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma, (i_n) \mapsto (i_{n+1})$  ( $\Sigma$  est un compact stable par  $\sigma$ ).

Choisissons un point de  $\Sigma$  dans chaque élément de  $S_n$  qui intersecte  $\Sigma$  et notons  $X_n$  l'ensemble ainsi formé,  $c_n$  son cardinal. Pour  $\varepsilon = \frac{1}{3^k-1}$ ,  $X_{n+k}$  est  $(n, \varepsilon)$  séparé et couvrant et l'on en déduit  $h(\sigma|_{\Sigma}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln c_n$ .

Il est intéressant d'interpréter cette formule. Le taux d'accroissement exponentiel de  $c_n$  représente la « capacité » d'information du système  $(\Sigma, \sigma)$ . En effet,  $c_n$  est le nombre de mots de  $\Sigma$  que l'on peut former si l'on ne distingue que les  $n$  premiers caractères. Ainsi l'entropie trouve-t-elle des applications dans la **théorie de l'information** (la formule précédente constitue alors sa définition).

*Exemple (L'application logistique  $f_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$ ).* Nous nous intéressons ici au cas  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . La suite des itérés d'un point hors de  $I = [0, 1]$  tend vers  $-\infty$ , on ne s'intéresse donc qu'aux points de  $\Lambda = \{x \in I \mid \forall n \in \mathbb{N}, f_{\mu}^n(x) \in I\}$  (on montre qu'il s'agit d'un ensemble de Cantor). Comme  $f_{\mu}(\frac{1}{2}) > 1$ ,  $I \cap f_{\mu}^{-1}(I)$  est la réunion disjointe de deux segments  $I_1$  et  $I_2$  (voir fig. 1).

On montre facilement que la partition  $\{I_1 \cap \Lambda, I_2 \cap \Lambda\}$  permet d'utiliser les résultats de l'exemple précédent (dynamique symbolique) :  $\Psi$  est alors bijective  $\Lambda \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$  et l'on en déduit immédiatement  $h(f_{\mu}|_{\Lambda}) = \ln 2$ .

### 3 Un schéma classique de démonstration

Dans cette dernière partie, nous présentons un schéma classique de démonstration de théorèmes sur l'entropie topologique, que nous illustrerons par trois exemples. On souhaite souvent obtenir, sous certaines hypothèses, des inégalités sur l'entropie d'une application. Il s'agit donc d'encadrer  $r(n, \varepsilon, f)$  ou  $s(n, \varepsilon, f)$  en utilisant les hypothèses. Pour cela, on considère à priori un ensemble  $A(n, \varepsilon)$  couvrant. Il permet d'approcher le comportement du système sur une durée  $n$ . Ce n'est pas suffisant pour utiliser les hypothèses : l'idée est de **découper une orbite** de longueur  $nl$  et d'approximer les  $l$  sous-segments succesifs par  $A$ . A tout point de  $x$  nous pouvons associer  $l$  points de  $A$   $\varepsilon$ -proches (au sens de  $d_{n,f}$ ) de  $x, f^n(x), f^{2n}(x), \dots$ . L'application ainsi définie sera injective si l'on considère sa restriction à un ensemble  $(nl, 2\varepsilon)$  séparé. En majorant le cardinal de l'image de cette application (c'est ici que l'on injecte les hypothèses), on majore  $s(nl, 2\varepsilon, f)$  en fonction de  $r(n, \varepsilon, f)$  (pour  $l = 1$ , on retrouve la démonstration de l'inégalité  $s(n, 2\varepsilon, f) \leq r(n, \varepsilon, f)$ ). On peut enfin faire tendre  $l \rightarrow \infty$ .

#### 3.1 Pas d'hypothèses

Si l'on ne se donne pas d'hypothèse supplémentaire, on obtient par cette méthode :  $s(nl, 2\varepsilon) \leq r(n, \varepsilon)^l$  qui donne  $h_{sep}(2\varepsilon, f) \leq \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon, f)$ . D'une part, cela prouve que si  $h(f) > 0$  (ce qui définit une application chaotique), alors la croissance de  $r(n, \varepsilon, f)$  et de  $s(n, \varepsilon, f)$  est au moins exponentielle pour  $\varepsilon$  assez petit. D'autre part, cette relation montre que  $h_{sep}(\varepsilon, f) < \infty$  (et donc  $h(\varepsilon, f) < \infty$ ).

#### 3.2 Entropie et « non-wandering set »

**Théorème 3 (Entropie et « non-wandering set »).** On note  $\Omega = \{x \in E \mid \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n \in \mathbb{N}^* \setminus f^n(V) \cap V \neq \emptyset\}$  l'ensemble des points non-errants (non wandering). Alors :  $\Omega$  est un fermé stable et  $h(f) = h(f|_{\Omega})$ .

*Démonstration.* La stabilité et la fermeture de  $\Omega$  sont faciles à établir, ainsi que  $h(f|_{\Omega}) \leq h(f)$  (car  $\Omega \subset E$ ). Soit  $n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon > 0$ . Prenons  $A \subset \Omega(n, \varepsilon)$  couvrant de cardinal minimal pour  $f|_{\Omega}$  et considérons l'ouvert  $U = \bigcup_{x \in A} B_{n,f}(x, \varepsilon)$ .  $F = E \setminus U$  est compact et si  $x \in F$ , il existe  $V_x \in \mathcal{V}(x)$  tel que  $\forall i \in \mathbb{N}^*, f^i(V_x) \cap V_x = \emptyset$ . Soit  $\eta < \varepsilon$  un nombre de Lebesgue du recouvrement de  $F$  par les  $V_x, x \in F$ . On a alors, si  $x \in F$  et  $B = B_{n,f}(x, \eta) \cap F : \forall i \in \mathbb{N}^*, f^i(B) \cap B = \emptyset$  car  $B \subset B(x, \eta)$  qui est incluse dans un  $V_y$ .

On considère alors  $B \subset F(n, \eta)$  couvrant  $F$ . Prenons  $l \in \mathbb{N}^*$  et définissons l'application  $\Psi : E \rightarrow E^l, x \mapsto (\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1})$  où : 
$$\begin{cases} \alpha_i \in A \text{ et } d_{n,f}(f^{ni}(x), \alpha_i) < \varepsilon & \text{si } f^{ni}(x) \in U \\ \alpha_i \in B \text{ et } d_{n,f}(f^{ni}(x), \alpha_i) < \eta & \text{si } f^{ni}(x) \in F \end{cases}$$

La remarque précédente implique qu'un  $\alpha_i$  de  $B$  ne peut apparaître plusieurs fois dans le  $l$ -uplet  $\Psi(x)$ . Cela permet de majorer grossièrement (*ici reside le coeur de la démonstration*) le cardinal de l'image de  $\Psi$ , en notant  $a = |A| = r(n, \varepsilon, f|_{\Omega})$  et  $b = |B| : |\Psi(E)| \leq \sum_j C_b^j A_l^j a^{l-j} \leq \sum_{j \leq b} b! l^b a^l \leq (b+1)! l^b a^l$ . Remarquons la contribution de  $b$  qui n'apporte qu'un terme polynômial en  $l$  (qui disparaît lorsque l'on étudie le taux d'accroissement exponentiel).

Conformément au schéma indiqué plus haut, on prend  $C$ , ensemble  $(nl, 2\varepsilon)$  séparé pour  $f$ , et  $\Psi$  est injective sur  $C$ , donc  $|C| \leq (b+1)! l^b a^l$  et on obtient  $s(nl, 2\varepsilon, f) \leq (b+1)! l^b a^l$  ce qui permet de conclure.  $\square$

*Remarque:* Ce théorème montre que l'entropie n'est pas modifiée si l'on prolonge  $f$  sur un ensemble de points « errants ».  $E = \{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$  est compact.  $f : E \rightarrow E, re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{2}(r+1)e^{2i\theta}$  est continue. On a  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  et  $f|_{\Omega}$  est l'application doublement des angles.  $h(f) = \ln 2$ , ainsi  $f$  est chaotique au sens de l'entropie, mais pas au sens de Devaney <sup>1</sup> (la transitivité n'est pas vérifiée).

#### 3.3 Retour sur la conjugaison

**Définition.** On dit qu'une application est presque injective s'il existe un majorant au cardinal des fibres (aucun point n'a plus de  $C$  antécédents,  $C$  étant une constante).

<sup>1</sup>Pour Devaney [3],  $f : E \rightarrow E$  est chaotique si elle est sensible aux conditions initiales ( $\exists r > 0 \setminus \forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in E, \exists k \in \mathbb{N}, d(x, y) < \varepsilon$  et  $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$ ), transitive ( $\forall (U, V)$  ouverts non vides,  $\exists n \in \mathbb{N}^* \setminus f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ), et si ses points périodiques constituent un ensemble dense.

On dit que  $g : F \rightarrow F$  est presque conjuguée à  $f : E \rightarrow E$  par  $\Psi : E \rightarrow F$  si  $g$  est semi-conjuguée à  $f$  par  $\Psi$  et si  $\Psi$  est presque injective

**Théorème 4.** *Deux applications presque conjuguées ont la même entropie.*

*Démonstration.* On se place dans la situation du schéma de la section 2.2. On a déjà établi  $h(g) \leq h(f)$ . Soit  $C$  un majorant au nombre d'antécédents par  $\Psi$  d'un point quelconque de  $F$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $y \in F$ , on pose :  $U_y = \bigcup_{x \in \Psi^{-1}(y)} B_{n,f}(x, \varepsilon)$ . Il s'agit d'un voisinage des points de  $\Psi^{-1}(y)$ . Il existe alors un voisinage  $V_y$  de  $y$  tel que  $\Psi^{-1}(V_y) \subset U_y$  (par l'absurde, en utilisant la continuité de  $\Psi$  et la compacité de  $E$ ). Soit  $\beta$  un nombre de Lebesgue du recouvrement de  $F$  par les  $V_y$ . On associe à  $y \in F$ ,  $q(y) \in F$  tel que  $B(y, \beta) \subset V_{q(y)}$ . Ainsi, lorsque  $d(\Psi(x), y) < \beta$ , il existe  $z \in \Psi^{-1}(q(y))$  tel que  $d_{n,f}(x, z) < \varepsilon$ .

On se donne maintenant un entier  $l$  et l'on considère un ensemble  $A(nl, \beta)$  couvrant pour  $g$ , qui va permettre de contrôler le cardinal d'un ensemble  $(nl, 2\varepsilon)$  séparé pour  $f$ . Si  $x \in E$ , on peut tout d'abord lui associer un  $y \in A$  de sorte que  $d_{nl,g}(y, \Psi(x)) < \beta$ . Cela donne en particulier, pour  $0 \leq k < l$  :  $d(g^{kn}(y), \Psi(f^{kn}(x))) < \beta$  et donc, d'après ce qui fut dit plus haut, l'existence d'un  $\alpha_k \in \Psi^{-1}(g^{kn}(y))$  tel que  $d_{n,f}(f^{kn}(x), \alpha_k) < \varepsilon$ . On définit ainsi une application  $\Phi : E \rightarrow A \times E^l, x \mapsto (y; \alpha_0, \dots, \alpha_{l-1})$ . On constate que pour un  $y$  fixé, il y a au maximum  $C^l$  choix possibles de  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1})$  car chaque  $\alpha_k$  doit être pris dans une fibre donnée. L'image de  $\Phi$  a donc au plus  $C^l \text{Card } A$  éléments et il est clair que  $\Phi$  restreinte à un ensemble  $(nl, 2\varepsilon)$  séparé est injective. On obtient ainsi :  $s(nl, 2\varepsilon, f) \leq C^l r(nl, \beta, g)$  puis  $h_{sep}(2\varepsilon, f) \leq \frac{1}{n} \ln C + h(\beta, g)$  ce qui permet de conclure (remarque :  $\beta$  dépend de  $n$ , c'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser  $l$ ).  $\square$

*Exemple (La fonction logistique  $F_4$ ).* soit  $F_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto 4x(1-x)$ .  $F_4$  est pseudo-conjuguée à l'application doublement des angles introduite plus haut, par  $\Psi : S^1 \rightarrow [0, 1], x \mapsto \sin^2(\pi x)$ . Ainsi  $h(F_4) = \ln 2$ .

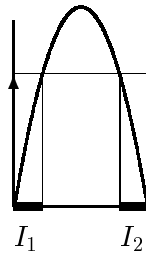
## Conclusion : tentative de calcul numérique approché de l'entropie

On peut proposer en guise de conclusion une modeste approche numérique du calcul de l'entropie. De nombreuses difficultés apparaissent lorsque l'on veut suivre la définition : calculer les  $r(n, \varepsilon, f)$  ; passer à la limite pour obtenir  $h(\varepsilon, f)$  ; représenter les points d'un espace métrique ; même les réels ne sont manipulés qu'en précision limitée ; les espaces sont finis, donc toute orbite est finalement périodique et l'entropie est alors nulle. On ne traitera que le cas des fonctions  $f$  définies sur un segment réel  $[a, b]$ . On peut approximer  $r(n, \varepsilon, f)$  de la manière suivante : on se fixe un pas  $\alpha$  ; on pose  $a_1 = a, a_{k+1} = \min\{x \in [a, b] \cap a_k + \mathbb{N}\alpha, d_{n,f}(x, a_k) > \varepsilon\}$ . Il est raisonnable de penser que la longueur de cette suite  $l_n$  est proche de  $r(n, \varepsilon, f)$ , si l'on prend un pas assez petit devant  $\varepsilon$  (et si les variations de  $f$  ne sont pas trop rapides).

Il faudrait ensuite calculer  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln l_n$ . L'idée de calculer  $l_n$  pour de grandes valeurs de  $n$  n'est pas réalisable (temps et précision limitée des calculs). On peut alors revenir à l'idée initiale de la définition : il s'agissait de mesurer la vitesse d'accroissement exponentiel de  $r(n, \varepsilon, f)$  et il est alors naturel de calculer la moyenne des premiers termes de la suite  $(l_{n+1}/l_n)$  (on obtient en fait l'exponentielle de l'entropie).

Ces calculs ont été effectués à  $\varepsilon$  fixé, mais il est nécessaire que  $\varepsilon$  reste très supérieur au pas  $\alpha$ , qui ne peut pas être pris trop petit (précision des calculs). Il n'est pas possible de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0, mais l'on constate sur les exemples simples que  $h(\varepsilon, f) = h(f)$  pour  $\varepsilon$  assez petit et il n'est donc pas gênant de fixer  $\varepsilon$  « assez petit mais pas trop ».

Le code CAML correspondant se trouve sur la figure 2. Les résultats ont été regroupés dans la table 1. Ils sont très convenables, assez peu sensibles aux petites modifications des constantes, ils se dégradent très vite lorsque l'on augmente significativement le pas, ou lorsque l'on diminue trop  $\varepsilon$ . Nous laissons bien sûr de coté l'étude de ce que l'algorithme calcule effectivement.

FIG. 1:  $F_\mu$ 

```
(* Constantes *)
let pas=0.0001 and eps=0.1 and nmax=5;;

(* Coeur de l'algorithme *)
let rneps f n eps a b =
  let rec dnf f n x y = if n= -1 then 0. else max (abs_float (x-.y)) (dnf f (n-1) (f x) (f y))
  in
  let rec aux nb x y = if y>b then nb else
    if (dnf f n x y>eps) then aux (nb+1) y (y+.pas) else aux nb x (y+.pas)
  in aux 1 a (a+.pas));;

(* Calcul de la suite des cardinaux des ensembles couvrants *)
let rec entr f n p eps a b =
  if n=p then [] else (rneps f p eps a b)::(entr f n (p+1) eps a b));;

(* [a0, a1, a2, ..] -> [a1/a0, a2/a1, ..] *)
let rec accr = function a::b::q -> (float_of_int b/. float_of_int a)::(accr (b::q)) | _ -> [];;

(* Moyenne de la liste *)
let moyenne l =
  let (s,n)=it_list (fun (somme,nb) x -> somme+.x, nb+1) (0.,0) l
  in s/.(float_of_int n));;

(* Entropie de la fonction f [a,b]->[a,b] *)
let entropie f a b = moyenne (tl (accr (entr f nmax 0 eps a b)));;

(* Fonctions de test *)
let logistique mu x = let z=mu*.x*(1.-.x) in if z\leq 1. then z else 0.;;
let boulanger x = if x>0.5 then 2.*(1.-.x) else 2.*.x;;
let compose f g x = f (g x);;
```

FIG. 2: Le code CAML de la fonction de calcul de l'entropie

Application	Valeur calculée	Valeur théorique
boulanger	1.9688809213	2.0
compose boulanger boulanger	4.0308417489	4.0
logistique 2.	1.15498575499	1.0
logistique 4.	1.9535671351	2.0
logistique 6.	2.06222550767	2.0
fun x->sin (x*.3.1415)	1.98804742781	2.0
fun x->x	1.0	1.0

TAB. 1: Résultats de la fonction entropie

## Références

- [1] C. Robinson. *Dynamical Systems : Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*; CRC Press, 1995
- [2] R. Adler, A. Konheim et M. McAndrew; *Topological entropy*; bulletin de l'AMS 114, 1965
- [3] R. Devaney. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*; Addison-Wesley, 1989
- [4] article de Banks, Brooks, Cairns, Davis et Stacey; *American Monthly*, avril 1992
- [5] R.A Homlgren. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*; Springer-Verlag
- [6] Melo et Van Strien. *One Dimensional Dynamics*; Springer, Berlin 1993
- [7] article Chaos de Encyclopaedia Universalis
- [8] C. Hillman, *Entropy in Ergodic Theory and Dynamical Systems*;  
<http://www.math.washington.edu/~hillman/Entropy/dynsys.html>  
De nombreux liens vers des articles sur l'entropie
- [9] M. Pollicott and M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*;  
<http://www.maths.warwick.ac.uk/~mp/lectures.html>